Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

RM

2022-2023

1 Nombre complexe de module 1

1.1 Groupe des nombres complexes de module 1

Définition 1 : On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Exemple 2 : Les nombres $1, -1, i$ sont dans $\mathbb{U}$ mais le nombre $z = 1 + i$ ne l'est pas.

Remarque 3 : Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on a alors que $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Finalement, on peut donc voir $\mathbb{U}$ comme le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, on en déduit :

Proposition 4 : Soit $\mathbb{S}^1$ la sphère unité de $\mathbb{R}^2$. L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \to & \mathbb{S}^1 \\ a+ib & \mapsto & (a,b) \end{array}$ est un homéomorphisme.

Corollaire 5 : l'ensemble $\mathbb{U}$ est compact.

Proposition 6 : L'ensemble $\mathbb{U}$ muni de la loi ce composition interne $\times$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1.2 Fonctions exponentielle et trigonométriques

Définition 7 : On définit la fonction exponentielle complexe pour $z \in \mathbb{C}$ par $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Remarque 8 : Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n \to +\infty} 1/n = 0$, on a que le rayon de convergence est $R = +\infty$ est la fonction exp est bien définie sur $\mathbb{C}$.

Proposition 9 : On a pour $z \in \mathbb{C}$ que $|e^z| = e^{Re(z)}$ et $|e^z| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$. Donc on a que $e^z \in \mathbb{U}$ si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$.

Théorème 10 : La fonction exponentielle complexe induit un homomorphisme de groupe $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$, qui est continu et surjectif.

Théorème 11 : On considère l'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{U}, t \mapsto e^{it}$. C'est un homomorphisme de groupe, surjectif et non injectif. Son noyau est de la forme $a \in \mathbb{Z}$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. Le réel a qui est le plus petit réel positif t tel que $z^{it} = 1$, est noté 2π.

Proposition 12 : (i) Le noyau de l'homomorphisme $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ est $2i\pi\mathbb{Z}$.

(ii) La fonction exponentielle complexe est périodique, et l'ensemble de ses périodes est $2i\pi\mathbb{Z}$.

Définition 13 : On appelle cosinus et sinus les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $\cos t = Re(e^{it})$ et $\sin t = Im(e^{it})$.

Remarque 14 : On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ et $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$.

Exemple 15 : Nous avons par exemple $e^{i\pi} = -1, \cos(\pi) = -1, \sin(\pi) = 0$.

Théorème 16 : On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ que $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

1.3 Argument d'un nombre complexe

Définition 17 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument de z tout nombre réel t tel que $e^{it} = z/|z|$.

Exemple 18 : π et $-\pi$ sont des arguments de -1.

Définition 19 : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^*$. On appelle détermination continue de l'argument sur $\mathbb{U}$ toute application continue $\theta : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z_i n\mathcal{U}$, $\theta(z)$ soit un argument de z.

Définition/Proposition 20 : On appelle détermination principale de l'argument sur $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, et on note $Argz$, pour $z \in \Omega_0$, l'unique argument de z tel que $Argz \in]-\pi, \pi[$.

Lemme 21 : La détermination principale de l'argument est une détermination continue de l'argument sur Ω_0.

Théorème 22 : Soit $\overrightarrow{e_1} = (0, 1)$ et on associe les vecteur $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ a $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. On a alors qu'un argument θ de z_1 est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v_1})$ et qu'un argument θ de $\frac{z_2}{z_1}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.

2 Utilisation des racines complexes de l'unité

2.1 Le groupe $\mathbb{U}_n$

Définition 23 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définie $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Remarque 24 : On a que $|\mathbb{U}_n| \leq n$ car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. On a de plus que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Exemple 25 : $\mathbb{U}_1 = \{1\}$, $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$, $\mathbb{U}_3 = \{1, j, \bar{j}\}$ et $\mathbb{U}_4 = \{-1, 1, -i, i\}$.

Proposition 26 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a que $\mathbb{U}_n = \{z_k = e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0\,; n-1]\!]\}$.

Remarque 27 : Comme les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les racines du polynômes $z^n - 1$, on a que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n})$.

Proposition 28 : $\mathbb{U}_n$ est un groupe multiplicatif isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il est donc en particulier cyclique et $e^{2i\pi/n}$ est un générateur.

Corollaire 29 : Les sous-groupes de $\mathbb{U}_n$ sont les $\mathbb{U}_d$ pour $d|n$.

2.2 Polynôme cyclotomique

Définition 30 : Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mu_n(\mathbb{K}) = \{\zeta \in \mathbb{K} | \zeta^n = 1\}$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité et $K_n = D_{\mathbb{K}}(X^n - 1)$. On pose de plus $\mu_n^*(\mathbb{K}_n) = \{\zeta \in \mathbb{K}_n | \zeta^n = 1 \text{ et } \zeta^d \neq 1 \text{ pour } d < n\}$ l'ensemble des racines primitives n-èmes de l'unité.

Proposition 31 : On a $|\mu_n^*(\mathbb{K}_n)| = \varphi(n)$ et si $\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{K}_n)$, alors ζ^m l'est aussi si et seulement si $m \wedge n = 1$.

Définition 32 : On définit le n-ème polynôme cyclotomique $\Phi_{n,\mathbb{K}} \in \mathbb{K}_n[X]$ est donné par la formule :

$$\Phi_{n,\mathbb{K}}(X) = \prod_{\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{K}_n)} (X - \zeta).$$

Remarque 33 : Sur $\mathbb{Q}$, comme le corps de décomposition de $X^n - 1$ est $\mathbb{C}$, on a les racines n-èmes de l'unité "classiques".

Proposition 34 : On a que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.

Exemple 35 : On a $\Phi_1(X) = X - 1$, $Phi_2(X) = X + 1$, $\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$, $\Phi_p(X) = X^{p-1} + ... + X + 1$ pour p premier.

Proposition 36 : On a $\Phi_{n,\mathbb{Q}}(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Développement 37 : $\Phi_n(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$ (et donc dans $\mathbb{Q}[X]$).

Application 38 : Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}$. Il y a alors un nombre fini de racines de l'unité dans $\mathbb{K}$.

Dev 1

Corollaire 39 : Si ζ est une racine primitive n-ème de l'unité dans un corps de caractéristique nulle, alors son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est Φ_n, et donc on a $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

3 Application en algèbre

3.1 Déterminant circulant et isobarycentre

Définition 40 : On appelle isobarycentres de $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}^n$ le nombre complexe $\frac{z_1 + ... + z_n}{n}$.

Théorème (Déterminant circulant) 41 : Soient $a_0, ..., a_{n-1}$ des nombres complexes. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$$

Théorème 42 : Soit P un polygone du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1, ..., z_n\}$. On définit alors par récurrence une suite de polygones $(P_k)_{k \geq 0}$, avec $P_0 = P$, et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.
Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre g de P avec $g = \dfrac{z_1 + ... + z_n}{n}$.

3.2 Le théorème de Kronecker

Théorème (Kronecker) 43 : Soit $\alpha \neq 0$ un entier algébrique (i.e un nombre algébrique dont le polynôme minimal unitaire est dans $\mathbb{Z}[X]$) dont tous les conjugués appartiennent à $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité. Alors α est une racine de l'unité, i.e il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha^m = 1$.
Corollaire 44 : Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que toutes les racines complexes soient de modules au plus 1. Alors $P = X$ ou P est un polynôme cyclotomique.

Dev 2

3.3 Transformée de Fourrier discrète

A voir si je trouve quelque chose d'intéressant plus tard.

Références

1. Algèbre et géométrie Rombaldi
2. Analyse complexe pour la licence 3 Tauvel
3. Cours d'algèbre Perrin
4. Algèbre Gourdon